

PENGEMBANGAN *EQUIVALENT PLATE MODEL* UNTUK ANALISA DINAMIS PADA STRUKTUR *PLATE-LIKE WING* DENGAN MATERIAL KOMPOSIT

*Reni¹, Ismoyo Haryanto²

¹Mahasiswa Jurusan Teknik Mesin, Fakultas Teknik, Universitas Diponegoro

²Dosen Jurusan Teknik Mesin, Fakultas Teknik, Universitas Diponegoro

Jl. Prof. Sudharto, SH., Tembalang-Semarang 50275, Telp. +62247460059

*E-mail: phangreni@gmail.com

Abstrak

Analisa getaran bebas dilakukan pada struktur sayap pesawat udara yang dibuat menggunakan material komposit. *Equivalent plate model* dengan *first-order shear deformation theory* berdasarkan metode Reissner-Mindlin digunakan untuk mendapatkan nilai frekuensi pribadi dan modus getar dari struktur sayap pesawat udara tersebut. Struktur sayap pesawat udara ini dimodelkan dalam bentuk *plate-like wing* dengan material komposit. Laminat yang simetris diberikan struktur *plate-like wing* ini. Persamaan gerak diturunkan dari Persamaan Lagrange untuk getaran bebas. Validasi dilakukan pada hasil analisa terhadap data yang ada pada literatur. Hasil validasi menunjukkan kecocokan antara hasil analisa yang dilakukan terhadap data pada literatur.

Kata kunci: *Equivalent plate model, Plate-like wing* dengan material komposit, Getaran bebas

Abstract

Free vibration analysis of composite aircraft wing is studied. Equivalent plate model with first-order shear deformation theory based on Reissner-Mindlin method is used to get the natural frequencies and mode shapes of the composite aircraft wing. Plate-like composite wing is considered in this study to modeling the composite aircraft wing. Symmetric laminates are applied for the plate-like composite wing model. Equations of motion are derived from the Lagrange's equations for free vibration. Validations are done to compare the present results with the available in the literature. The present results show good agreement with the literature's.

Keywords: *Equivalent plate model, Plate-like composite wing, Free vibration*

1. Pendahuluan

Penggunaan material komposit banyak dijumpai dalam industri penerbangan karena material komposit memiliki beberapa kelebihan jika dibandingkan dengan material isotropik (seperti aluminium). Kelebihan utama material komposit ialah rasio kekuatan-massa (kekuatan jenis) dan kekakuan-massa (kekakuan jenis) yang tinggi. Hal tersebut pula yang mendasari penggunaan material komposit dalam industri penerbangan [1], contohnya ialah penggunaan material komposit pada struktur sayap pesawat udara dimana berat dari struktur pesawat udara merupakan faktor yang penting. Material komposit memiliki kemampuan yang sama seperti material isotropik tetapi dapat membuat struktur menjadi jauh lebih ringan, serta sifatnya yang lebih tahan terhadap lingkungan dibandingkan dengan logam [2]. Selain itu, untuk jenis material komposit dengan bahan penguat berupa serat seperti komposit laminat, sifat material bergantung dari susunan arah serat tiap lamina, sehingga dapat disesuaikan untuk memperoleh kekuatan dan kekakuan dari struktur yang diperlukan. Sehingga, agar efisien dalam penggunaannya, maka perlu dilakukan analisa struktur ketika diberi pembebanan, salah satunya ialah analisa dinamis dari struktur.

Analisa elemen hingga (*Finite Element Analysis* atau FEA) merupakan salah satu analisa yang paling banyak digunakan dalam menganalisa struktur. Metode ini dapat menganalisa perpindahan, tegangan, regangan, getaran dan analisa lainnya pada struktur, selain itu cukup detail jika digunakan untuk menganalisa struktur pada langkah akhir dari proses mendesain [3]. Analisa ini membagi struktur menjadi elemen-elemen kecil (diskritisasi) yang terhubung oleh titik-titik (*nodes*). Nilai analisa yang didapat hanya merupakan nilai pada titik-titik tersebut, sehingga analisa ini tidak bersifat kontinu. Dalam menganalisa gaya-gaya aerodinamis, juga dilakukan diskritisasi. Dengan memisalkan titik-titik hasil diskritisasi pada analisa struktur sebagai "Titik-titik A" dan titik-titik hasil diskritisasi pada analisa aerodinamis dinamai "Titik-titik B", maka ketika hasil analisa struktur digunakan dalam analisa gaya-gaya aerodinamis pada struktur, ada kemungkinan "Titik-titik A" tidak berhimpit dengan "Titik-titik B". Sedangkan untuk menganalisa gaya-gaya aerodinamis (pada "Titik-titik B") diperlukan nilai analisa struktur pada "Titik-titik B" tersebut. Sehingga nilai-nilai hasil analisa struktur (pada "Titik-titik A") perlu diinterpolasi terlebih dahulu untuk mendapatkan nilai-nilai pada "Titik-titik B".

Berbeda dengan FEA yang membagi struktur menjadi elemen-elemen kecil, analisa struktur dengan menggunakan

metode pendekatan pelat (*Equivalent Plate Model* atau EPM) tidak mendiskritisasi struktur. Analisa dengan metode ini bersifat kontinu, nilai yang didapat bukan hanya nilai pada “Titik-titik A” tetapi pada setiap titik pada struktur. Sehingga nilai-nilai analisa struktur pada “Titik-titik B” yang diperlukan untuk analisa gaya-gaya aerodinamis dapat langsung diperoleh tanpa proses interpolasi. Maka, untuk kasus yang melibatkan faktor aerodinamis dari suatu struktur, metode EPM ini lebih efisien dibandingkan dengan FEA.

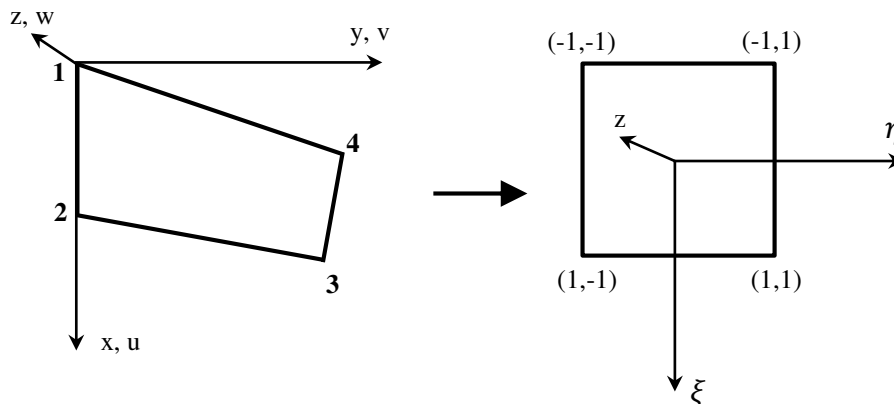
Equivalent Plate Model atau EPM merupakan salah satu metode analitik yang digunakan untuk menganalisa struktur dengan material komposit laminat. Terdapat beberapa penelitian dalam menganalisa struktur baik dengan material isotropik maupun komposit laminat, baik menggunakan metode analitik seperti EPM maupun metode numerik seperti FEA, seperti yang dilakukan oleh Kant dan Swaminathan [4], mereka menggunakan *Higher-order Refined Theory* untuk menganalisa pelat dan sandwich plates dengan material komposit laminat. *Classical Laminate Theory* (CLT) yang digunakan oleh Rojas [2] untuk menganalisa struktur beams dengan material komposit laminat. Na dan Shin [3], mereka menggunakan EPM untuk menganalisa struktur sayap pesawat udara yang memiliki control surface dimana bagian *skins* sayap pesawat udara menggunakan material komposit laminat sedangkan *spars* dan *ribs* menggunakan material isotropik. Liu [5] menggunakan EPM dengan *First-order Shear Deformation Theory* (FSDT) yang berdasarkan pada metode Reissner-Mindlin untuk menganalisa struktur sayap pesawat udara dengan material isotropik. Serta Vo dan Lee [6] yang melakukan analisa pada *thin-walled box beams* dengan material komposit laminat.

Penelitian tentang penggunaan EPM untuk analisa struktur maupun analisa struktur dengan material komposit laminat telah banyak dilakukan, akan tetapi penggunaan EPM untuk menganalisa struktur *plate-like wing* dengan material komposit laminat masih jarang dilakukan. Oleh karena itu, pada penelitian ini analisa dinamis pada struktur *plate-like wing* dengan material komposit laminat dilakukan dengan pemodelan EPM yang diprogramkan dengan menggunakan software MATLAB. Pemodelan EPM ini dilakukan dengan menggunakan *First-order Shear Deformation Theory* (FSDT) yang berdasarkan pada metode Reissner-Mindlin. Analisa dilakukan untuk mendapatkan nilai frekuensi pribadi dan modus getar struktur tersebut, dan hasilnya dibandingkan dengan nilai yang diperoleh dari literatur.

2. Model Matematika

2.1 *Equivalent Plate Model*

Equivalent plate model memodelkan struktur sayap pesawat sebagai sebuah pelat seperti pada Gambar 1. Koordinat x, y, z ditransformasikan menjadi koordinat ξ, η, z .



Gambar 1. Koordinat sistem dan transformasi [1].

Transformasi bidang 1,2,3,4 pada koordinat x, y, z seperti pada Gambar 1. menjadi kotak dalam koordinat ξ, η, z . dapat diformulasikan sebagai berikut

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) x_i \\ y &= \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) y_i \end{aligned} \quad (1)$$

Dimana,

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \\ N_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \\ N_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \\ N_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \end{aligned} \quad (2)$$

Matriks Jacobian untuk transformasi ini sebagai berikut.

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (3)$$

Invers dari matriks Jacobian seperti pada persamaan (4) berikut ini.

$$[J]^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial x}{\partial \eta} \\ -\frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix}}{|J|} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{J}_{11} & \bar{J}_{12} \\ \bar{J}_{21} & \bar{J}_{22} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Dimana $|J|$ merupakan determinan dari matriks Jacobian. Maka turunan suatu fungsi terhadap ξ dan η dapat dituliskan seperti pada persamaan (5).

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^T \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{Bmatrix} \\ \therefore \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{Bmatrix} &= ([J]^T)^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = ([J]^{-1})^T \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{J}_{11} & \bar{J}_{21} \\ \bar{J}_{12} & \bar{J}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (5)$$

2.2 First-order Shear Deformation Theory (FSDT)

FSDT berdasarkan metode Reissner-Mindlin untuk sebuah pelat mengasumsikan bahwa perpindahan yang terjadi dalam arah z linier dan *plane stress* pada arah tersebut. Berdasarkan asumsi tersebut maka persamaan untuk perpindahan yang terjadi dalam arah x, y , dan z seperti berikut.

$$\begin{aligned} u(x, y, x, t) &= u_0(x, y, t) + z\theta_x(x, y, t) \\ v(x, y, x, t) &= v_0(x, y, t) + z\theta_y(x, y, t) \\ w(x, y, x, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad (6)$$

Persamaan untuk regangan dapat diturunkan dari persamaan (6)

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x^0 + z\kappa_x \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_y^0 + z\kappa_y \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \varepsilon_{xy}^0 + z\kappa_{xy} \end{aligned}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \gamma_{yz}^0$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \gamma_{zx}^0 \quad (7)$$

dimana,

$$\begin{aligned} (\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \varepsilon_{xy}^0) &= \left(\frac{\partial u_0}{\partial x}, \frac{\partial v_0}{\partial y}, \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \\ (\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}) &= \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x}, \frac{\partial \theta_y}{\partial y}, \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \right) \\ (\gamma_{zx}^0, \gamma_{yz}^0) &= \left(\theta_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}, \theta_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (8)$$

Besarnya u_0 , v_0 , w_0 , θ_x , dan θ_y didefinisikan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} u_0 &= \{B_{IJ}\}^T \{q_U\} = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J U_{ij}(t) B_i(\xi) B_j(\eta) \\ v_0 &= \{B_{KL}\}^T \{q_V\} = \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^L U_{kl}(t) B_k(\xi) B_l(\eta) \\ w_0 &= \{B_{MN}\}^T \{q_W\} = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N U_{mn}(t) B_m(\xi) B_n(\eta) \\ \theta_x &= \{B_{PQ}\}^T \{q_X\} = \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q U_{pq}(t) B_p(\xi) B_q(\eta) \\ \theta_y &= \{B_{RS}\}^T \{q_Y\} = \sum_{r=1}^R \sum_{s=1}^S U_{rs}(t) B_r(\xi) B_s(\eta) \end{aligned} \quad (9)$$

Dimana $I, J, K, L, M, N, P, Q, R$ dan S adalah bilangan bulat, $\{q\}$ merupakan *generalized displacement vector*, dan $\{B\}$ merupakan *Ritz base function vector* dan dibangun dengan menggunakan persamaan polinomial Chebyshev.

2.3 Matriks Kekakuan dan Massa

Matriks kekakuan diturunkan dari persamaan energi regangan seperti berikut ini.

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dV \quad (10)$$

Berdasarkan Hukum Hooke, maka hubungan antara tegangan-regangan dapat dituliskan $\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$, dimana $[D]$ merupakan matriks tegangan-regangan atau biasa disebut sebagai matriks *constitutive*. Maka $\{\sigma\}^T = \{\varepsilon\}^T [D]^T$, dengan mengasumsikan $[D]^T = [D]$ maka persamaan (10) menjadi seperti berikut ini.

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V \{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} dV \quad (11)$$

Jika $\{\varepsilon\} = [T]\{\bar{\varepsilon}\}$, maka nilai $[T]$ dan $\{\bar{\varepsilon}\}$ dituliskan seperti pada persamaan (12) dan (13).

$$[T] = \begin{bmatrix} \bar{J}_{11} & \bar{J}_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{J}_{12} & \bar{J}_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{J}_{12} & \bar{J}_{22} & \bar{J}_{11} & \bar{J}_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{J}_{11} & \bar{J}_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{J}_{12} & \bar{J}_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{J}_{12} & \bar{J}_{22} & \bar{J}_{11} & \bar{J}_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{J}_{12} & \bar{J}_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{J}_{11} & \bar{J}_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \partial u_0 / \partial \xi \\ \partial u_0 / \partial \eta \\ \partial v_0 / \partial \xi \\ \partial v_0 / \partial \eta \\ \partial w_0 / \partial \xi \\ \partial w_0 / \partial \eta \\ \partial \theta_x / \partial \xi \\ \partial \theta_x / \partial \eta \\ \partial \theta_y / \partial \xi \\ \partial \theta_y / \partial \eta \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J U_{ij}(t) B'_i(\xi) B_j(\eta) \\ \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J U_{ij}(t) B_i(\xi) B'_j(\eta) \\ \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^L U_{kl}(t) B'_k(\xi) B_l(\eta) \\ \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^L U_{kl}(t) B_k(\xi) B'_l(\eta) \\ \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N U_{mn}(t) B'_m(\xi) B_n(\eta) \\ \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N U_{mn}(t) B_m(\xi) B'_n(\eta) \\ \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q U_{pq}(t) B'_p(\xi) B_q(\eta) \\ \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q U_{pq}(t) B_p(\xi) B'_q(\eta) \\ \sum_{r=1}^R \sum_{s=1}^S U_{rs}(t) B'_r(\xi) B_s(\eta) \\ \sum_{r=1}^R \sum_{s=1}^S U_{rs}(t) B_r(\xi) B'_s(\eta) \\ \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q U_{pq}(t) B_p(\xi) B_q(\eta) \\ \sum_{r=1}^R \sum_{s=1}^S U_{rs}(t) B_r(\xi) B_s(\eta) \end{Bmatrix} = [C]\{q\} \quad (13)$$

Maka persamaan (11) dapat dituliskan seperti berikut.

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V \{q\}^T [C]^T [T]^T [D] [T] [C] \{q\} dV = \frac{1}{2} \{q\}^T [K] \{q\} \quad (14)$$

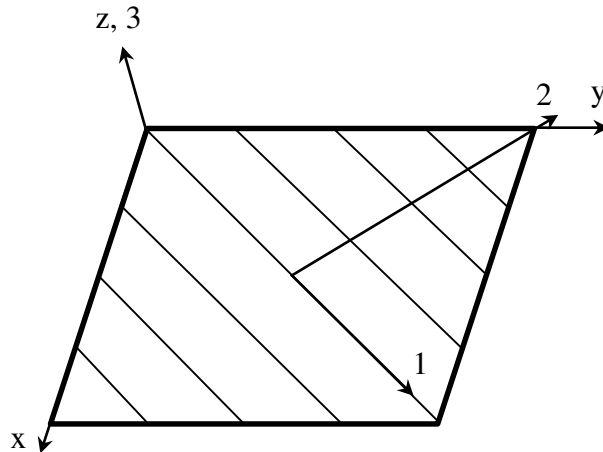
dimana $[K]$ merupakan matriks kekakuan seperti pada persamaan (15).

$$[K] = \iiint_V [C]^T [T]^T [D] [T] [C] dx dy dz \quad (15)$$

Pada Gambar 2 diperlihatkan contoh dari koordinat lamina dari suatu lapisan material komposit laminat dengan arah serat tertentu. Arah 1 merupakan arah yang sejajar terhadap arah serat, arah 2 merupakan arah yang tegang lurus terhadap

arah serat, dan dalam bidang yang sama dengan arah 1. Sedangkan arah 3 merupakan arah tegak lurus terhadap arah serat. Hubungan tegangan-regangan berdasarkan arah serat seperti berikut.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \end{Bmatrix} \quad (16)$$



Gambar 2. Koordinat lamina.

Hubungan tegangan-regangan tersebut ditransformasikan untuk mendapatkan hubungan tegangan-regangan dalam koordinat laminat (x,y dan z). Sehingga persamaan (16) menjadi seperti berikut.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{13} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{13} & \bar{Q}_{23} & \bar{Q}_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (17)$$

Sehingga *constitutive matrix* untuk material komposit laminat dituliskan sebagai berikut.

$$\left(\int_{h_{k-1}}^{h_k} [D] dz \right) = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{bmatrix} = [\mathbf{d}] \quad (18)$$

Dimana **A**, **B**, **D**, dan **E** didefinisikan seperti berikut.

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^n [\bar{Q}_{ij}]_k (h_k - h_{k-1}) \\ B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [\bar{Q}_{ij}]_k (h_k^2 - h_{k-1}^2) \\ D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n [\bar{Q}_{ij}]_k (h_k^3 - h_{k-1}^3) \\ E_{ij} &= \sum_{k=1}^n [(\bar{Q}_s)_{ij}]_k (h_k - h_{k-1}) \end{aligned} \quad (19)$$

Maka, **[K]** pada persamaan (15) menjadi seperti berikut.

$$[\mathbf{K}] = \iint_A [\mathbf{C}]^T [\mathbf{T}]^T [\mathbf{d}] [\mathbf{T}] [\mathbf{C}] dx dy \quad (20)$$

Sementara untuk matriks massa diturunkan dari persamaan energi kinetik.

$$T = \frac{1}{2} \iiint_V \rho \bar{v}^2 dV = \frac{1}{2} \iiint_V \rho \{\bar{v}\}^T \{\bar{v}\} dV \quad (21)$$

Dimana vector kecepatan didefinisikan sebagai berikut.

$$\{\bar{v}\} = \left\{ \frac{\partial \bar{d}}{\partial t} \right\} = \left\{ \frac{\partial u_0}{\partial t} + z \frac{\partial \theta_x}{\partial t}, \frac{\partial v_0}{\partial t} + z \frac{\partial \theta_y}{\partial t}, \frac{\partial w_0}{\partial t} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & z & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial t} \\ \frac{\partial v_0}{\partial t} \\ \frac{\partial w_0}{\partial t} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial t} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial t} \end{Bmatrix} = [Z][H]\{\dot{q}\} \quad (22)$$

Sehingga persamaan energi kinetik menjadi

$$T = \frac{1}{2} \iiint_V \rho \{\dot{q}\}^T [H]^T [ZZ] [H] \{\dot{q}\} dV = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^T [M] \{\dot{q}\} dV \quad (23)$$

Dengan nilai $[ZZ] = [Z]^T [Z]$ dan $[M]$ seperti berikut.

$$[M] = \iiint_V \rho [H]^T [ZZ] [H] dV = \iint_A \rho [H]^T \left(\int_{-h/2}^{h/2} [ZZ] dz \right) [H] dx dy \quad (24)$$

dimana

$$\int_{-h/2}^{h/2} [ZZ] dz = I_0, I_1, I_2 = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2) dz = [zz]$$

sehingga matriks massa untuk material komposit laminat dituliskan seperti berikut.

$$[M] = \iint_A \rho [H]^T [zz] [H] dx dy \quad (25)$$

2.4 Integrasi Numerik

Pengintegrasian dilakukan secara numerik dengan menggunakan metode kuadratur Gauss. Dalam pengintegrasian koordinat x dan y ditransformasikan menjadi koordinat ξ dan η .

$$I = \iiint_V F(x, y, z) dx dy dz = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\sum_{i=1}^{N_z} \int_{z_{i1}}^{z_{i2}} F[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta), z] \cdot |J| dz \right) d\xi d\eta \quad (26)$$

N_z merupakan jumlah zona integrasi dalam arah z, dan z_{i1} dan z_{i2} merupakan batas pengintegrasian. Maka pengintegrasian untuk pelat komposit laminat sebagai berikut.

$$\iiint_V F(x, y, z) dV = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\int_{z_L - \frac{1}{2}t_L}^{z_L + \frac{1}{2}t_L} F \cdot |J| dz + \int_{z_U - \frac{1}{2}t_U}^{z_U + \frac{1}{2}t_U} F \cdot |J| dz \right) d\xi d\eta \quad (27)$$

2.5 Persamaan Lagrange untuk Getaran Bebas

Persamaan gerak untuk getaran bebas diturunkan dari persamaan Lagrange.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (28)$$

Dimana, $L = T - V = T - U$. Dengan memasukkan persamaan (14) dan (23) ke persamaan (28), maka didapatkan persamaan gerak seperti berikut.

$$[K_{total} - \lambda M_{total}]\{x\} = 0 \quad (29)$$

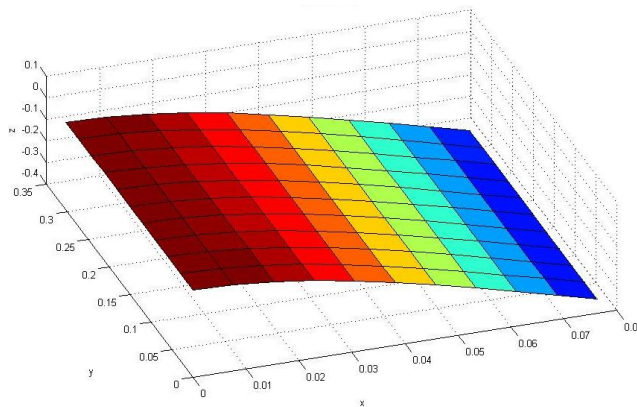
Dimana $\lambda = \omega^2$, maka diperoleh frekuensi pribadi dan modus getar dari struktur sayap pesawat.

3. Hasil dan Pembahasan

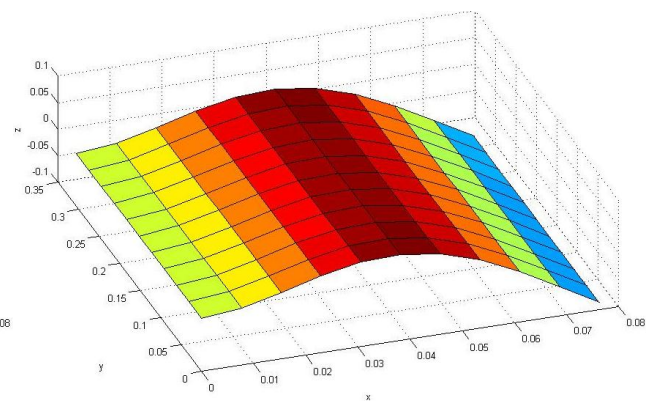
Equivalent plate model dengan *first-order shear deformation theory* (FSDT) berdasarkan metode Reissner-Mindlin digunakan untuk menganalisa struktur sayap pesawat dengan material komposit. Kasus pertama ialah analisa pada struktur *plate-like wing* dengan material komposit dengan *sweep angle* 0° dan kedua ialah analisa pada struktur *plate-like wing* dengan material komposit dengan *sweep angle* 30° . Kondisi batas diberikan dengan mengasumsikan bahwa struktur merupakan struktur kantilever. Dimensi dan sifat material yang digunakan untuk kedua struktur tersebut sama, yaitu panjang sayap 305 mm, panjang *chord* 76.2 mm dan tebal total laminat sebesar 0.804 mm. Material komposit laminat grafit/epoksi digunakan dengan sifat material tiap lamina: $E_L = 98.0$ GPa, $E_T = 7.90$ GPa, $G_{LT} = 5.60$ GPa, *Poisson's ratio* $\nu = 0.28$ dan $\rho = 1560$ kg/m³. Laminat merupakan susunan yang simetris, terdiri dari delapan lapis dengan susunan arah serat $[-22.5/67.5/22.5/-67.5]_s$ dan ketebalan tiap lapisan $[0.09/0.12/0.16/0.63]_s$, dimana besarnya merupakan rasio dari setengah tebal laminat. Lima frekuensi pribadi pertama untuk pelat dengan *sweep angle* 0° diperlihatkan dalam Tabel 1 dan modus getarnya seperti terlihat pada Gambar 3. Enam frekuensi pribadi pertama untuk pelat dengan *sweep angle* 30° diperlihatkan dalam Tabel 2 dan Gambar 4 memperlihatkan modus getarnya.

Tabel 1. Nilai frekuensi pribadi pelat dengan *sweep angle* 0° .

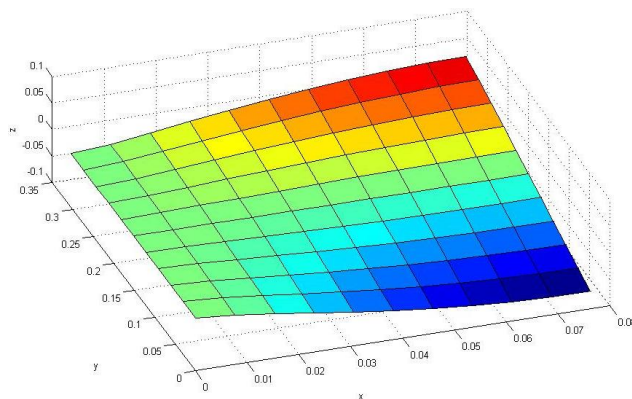
Mode	Frekuensi Pribadi (Hz)		Perbedaan (%)
	EPM (Reni)	CUF [7]	
1	7.30	7.20	1.40
2	45.72	45.00	1.59
3	58.93	59.10	0.29
4	128.28	126.40	1.49
5	181.78	182.30	0.29
Rata-rata			1.01



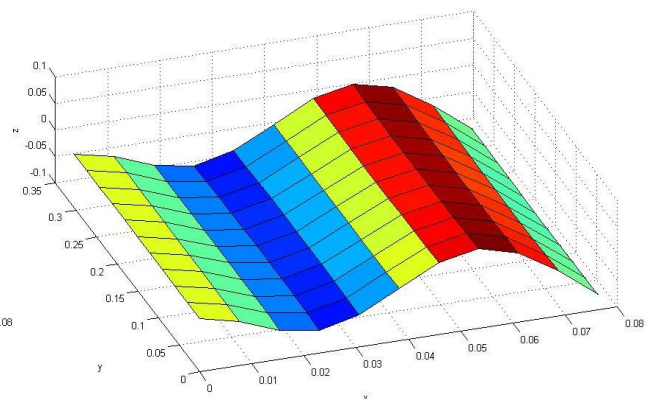
a. Modus getar 1, $f = 7.30$ Hz



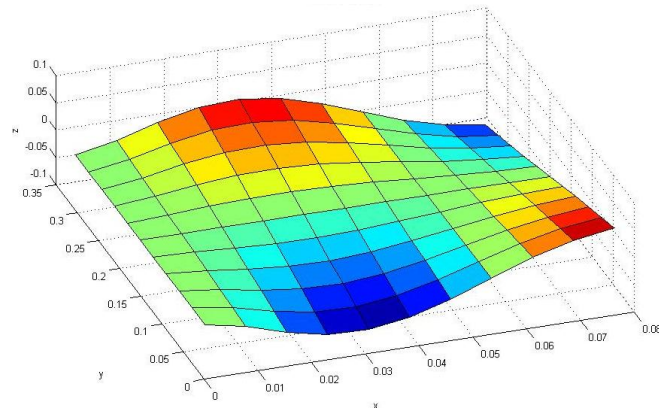
b. Modus getar 2, $f = 45.72$ Hz



c. Modus getar 3, $f = 58.93$ Hz



d. Modus getar 4, $f = 128.28$ Hz



e. Modus getar 5, $f = 181.87$ Hz

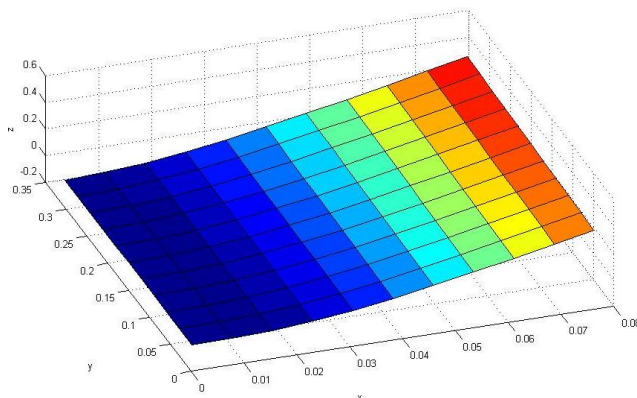
Gambar 3. Modus getar *plate-like wing* dengan *sweep angle* 0° .

Hasil analisa dibandingkan dengan nilai frekuensi pribadi yang didapat dari hasil penelitian yang dilakukan oleh Carrera, dkk yang melakukan analisa dinamis dengan menggunakan Carrera Unified Formulation (CUF) [7]. Hasil validasi menunjukkan kecocokan antara hasil analisa dengan data pada literatur tersebut, dengan rata-rata perbedaan nilai frekuensi pribadi yang diperoleh dengan data pada literatur hanya sebesar 1.01 % untuk struktur *plate-like wing* dengan *sweep angle* 0° , dengan modus getar pertama struktur merupakan modus *bending* pertama, modus getar kedua merupakan modus *bending* kedua, modus getar ketiga merupakan modus puntir pertama, modus getar keempat merupakan modus *bending* ketiga dan modus getar kelima merupakan modus puntir kedua.

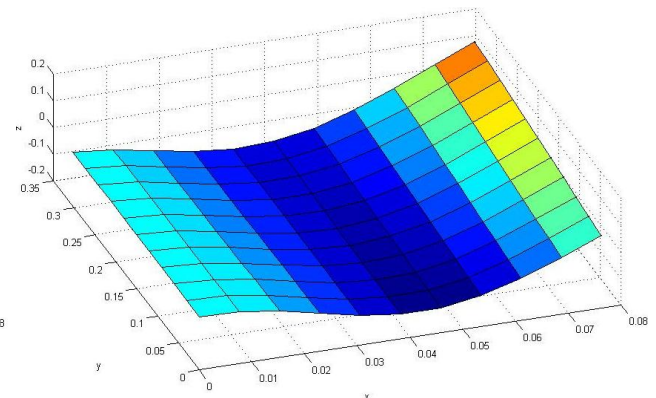
Untuk struktur *plate-like wing* dengan *sweep angle* 30° terlihat bahwa rata-rata perbedaan nilai frekuensi pribadi yang diperoleh dengan data pada literatur hanya sebesar 1.37 % dengan modus getar pertama merupakan modus *bending* pertama, modus getar kedua merupakan modus *bending* kedua, modus getar ketiga merupakan modus puntir pertama, modus getar keempat merupakan modus *bending* ketiga, modus getar kelima merupakan modus puntir kedua dan modus getar keenam merupakan modus *bending* keempat.

Tabel 3. Nilai frekuensi pribadi pelat dengan *sweep angle* 30° .

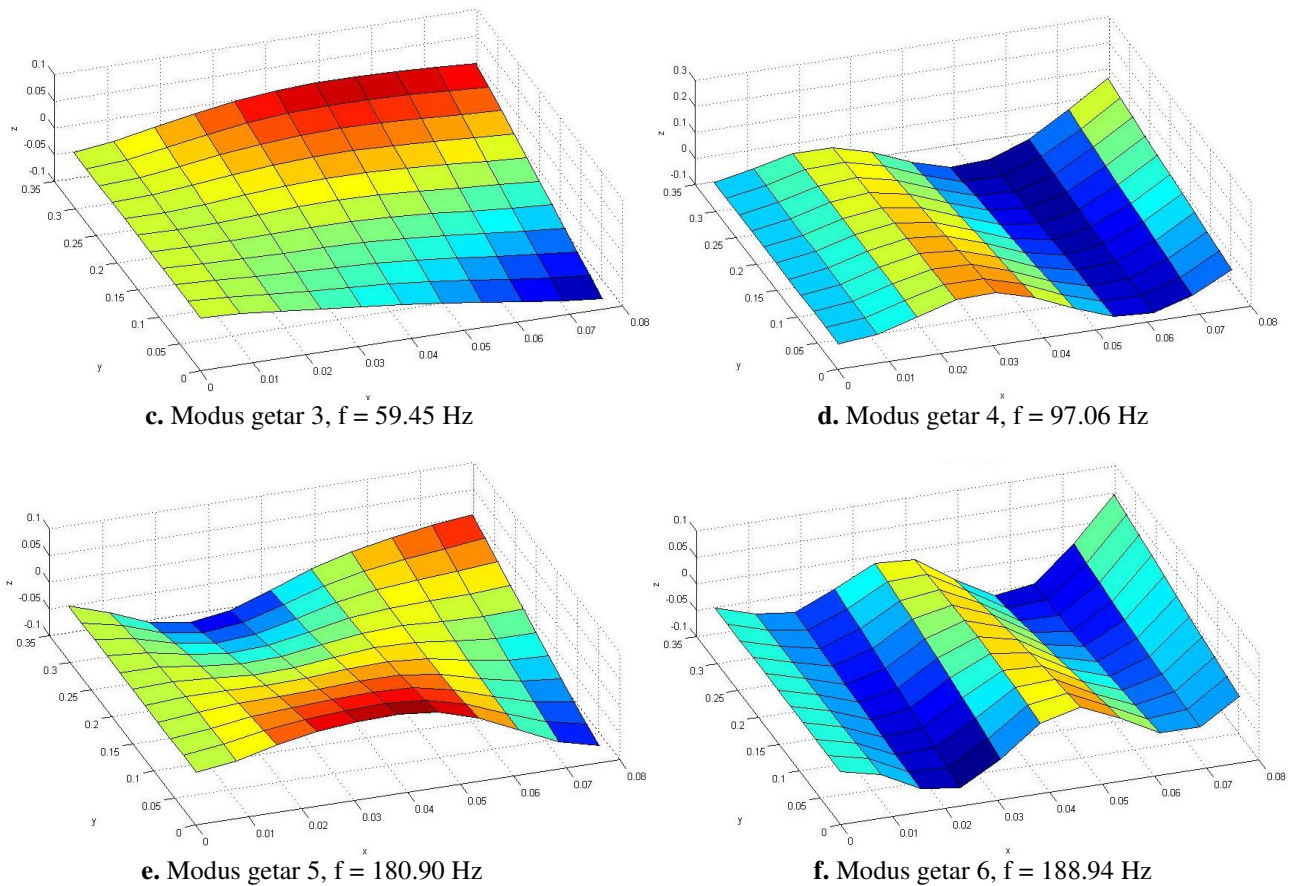
Mode	Frekuensi Pribadi (Hz)		Perbedaan (%)
	EPM (Reni)	CUF [7]	
1	5.70	5.60	1.83
2	34.86	34.20	1.92
3	59.45	59.20	0.42
4	97.06	95.30	1.84
5	180.90	180.10	0.45
6	188.94	185.70	1.75
Rata-rata			1.37



a. Modus getar 1, $f = 5.70$ Hz



b. Modus getar 2, $f = 34.86$ Hz



Gambar 5. Modus getar *plate-like wing* dengan *sweep angle* 30° .

4. Kesimpulan

Equivalent Plate Model dilakukan pada penelitian ini untuk mendapatkan nilai frekuensi pribadi dan modus getar dari struktur *plate-like wing* dengan material komposit laminat. Nilai frekuensi yang didapat dari analisa menggunakan metode ini dibandingkan dengan nilai frekuensi pribadi yang diambil dari literatur. Hasil validasi menunjukkan kecocokan antara hasil analisa dengan data pada literatur tersebut, dengan rata-rata perbedaan sebesar 1.01% untuk pelat dengan *sweep angle* 0° , dan rata-rata perbedaan sebesar 1.37% untuk pelat dengan *sweep angle* 30°

5. Daftar Pustaka

- [1] Gibson, R. F. 1994. *Principles of Composite Material Mechanics*. USA: McGraw-Hill, Inc.
- [2] Rojas, C. A. 2006. *Structural Analysis of Fiber Reinforced Composite Material*. Master. diss., *The Faculty of The Graduate School of The University of Texas at Arlington*.
- [3] Na, Y.H., Shin, S. 2013. *Equivalent-Plate Analysis for a Composite Wing with a Control Surface*. *Journal of Aircraft* 50 (3): 853-862.
- [4] Kant, T., Swaminathan, K. 2001. *Analytical Solutions for Free Vibration of Laminated Composite and Sandwich Plates Based on a Higher-order Refined Theory*. *Composite Structures* 53: 73-85.
- [5] Liu, Y. 2000. *Efficient Methods for Structural Analysis of Built-up Wings*. Ph.D. diss., *The Faculty of Virginia Polytechnic Institute and State University*.
- [6] Vo, T., Lee, J. 2008. *Free Vibration of Thin-walled Composite Box Beams*, *Composite Structures* 84 (1): 11-20. ISSN 0263-8223.
- [7] Carrera, E., Pagani, A., Cabral, P.H., Silva, G., Prado, A. 2015. *Enhanced Free Vibration Analysis of Composite Wing-box Structures by One-dimensional Component-wise and Dynamic Stiffness Formulations*. *International Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics*.